



Sociedade de Engenharia de Áudio

Artigo de Convenção

Apresentado na VIII Convenção Nacional
7 - 9 de Junho de 2004, São Paulo, SP

Este artigo foi reproduzido do original entregue pelo autor, sem edições, correções e considerações feitas pelo comitê técnico deste evento. Outros artigos podem ser adquiridos através da Audio Engineering Society, 60 East 42nd Street, New York, New York 10165-2520, USA, www.aes.org. Informações sobre a seção brasileira podem ser obtidas em www.aesbrasil.org. Todos os direitos reservados. Não é permitida a reprodução total ou parcial deste artigo sem autorização expressa da AES Brasil.

Revisão 12 - 06 - 2004

Potência “RMS” ou Potência Média ?

Homero Sette Silva

Eletrônica Selenium S. A.
92.480-000, Nova S^{ta}. Rita, RS

homero@selenium.com.br

RESUMO

A expressão “Potência RMS” continua em franco uso entre nós, não só em catálogos de fabricantes de amplificadores e alto-falantes como em publicações técnicas, inclusive as assinadas por este Autor, a despeito de inúmeros artigos, publicados na AES, e em outras fontes, claramente desaconselhando essa prática.

Este trabalho volta a esse velho tema, também recomendando que a citada expressão seja abolida, em favor do termo “Potência Média”.

Introdução

Deve ter sido há uns 30 ou 40 anos, quando nas páginas da Revista Antenna, li um artigo (talvez de Domingos Alves Velho, ou outro colaborador de igual quilate) condenando, com veemência, o uso da expressão “potência RMS”. Fiquei muito surpreso, na época, pois esta terminologia era usada rotineiramente e tinha a sua “lógica”, uma vez que era definida como sendo o produto dos valores eficazes da tensão e da corrente (vezes, ainda, o cosseno do ângulo de fase, para ângulos diferentes de zero).

O assunto foi, aos poucos, caindo no esquecimento (mas não olvidado de todo) e voltei a usar a tal expressão, não sem certa sensação de culpa ...

Recentemente, ao pesquisar na coleção do Journal of the Audio Engineering Society, deparei-me com uma série de artigos, publicados em 1972, exatamente abordando esse tema, assinados por pesquisadores como Robert Ashley, Paul Klipsch, John Eargle, Bart Locanthi e outros.

Coloquei os trabalhos em ordem cronológica e li-os com atenção.

Conclusão ? Sim: o termo "potência RMS", conforme vem sendo usado, fere o rigor científico e deve ser substituído pela expressão "potência média". Vejamos os porquês:

Fundamentos

A sigla RMS vem de Root Mean Square, ou seja, raiz quadrada da média dos valores elevados ao quadrado sendo, portanto, um valor médio. Assim, o valor RMS corresponde a uma média, obtida a partir dos valores da amostra, elevados ao quadrado, extraindo-se a raiz quadrada do valor obtido. Este procedimento elimina efeitos indesejáveis, que podem ser ocasionados por valores negativos nas amostras.

Exemplos:

1 - Uma série de medições, onde foram constatados erros iguais a 1 %, 2 %, -1 % e -2 %, se calculássemos a média aritmética, teríamos como resultado um erro médio igual à zero. Como um erro não "anula" o outro, este procedimento não tem sentido.

$$e_{\text{med}} = \frac{1 + 2 - 1 - 2}{4} = \frac{0}{4} = 0 \%$$

$$\begin{aligned} e_{\text{rms}} &= \sqrt{\frac{1^2 + 2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{1 + 4 + 1 + 4}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{10}{4}} = 1,58 \% \end{aligned}$$

2 - Uma tensão alternada senoidal, devido à simetria dos semi-ciclos positivos e negativos, tem valor médio igual à zero (dentro de um número inteiro de períodos). Se medíssemos a tensão disponível na tomada, com um voltímetro sensível ao valor médio, encontraríamos sempre zero, o que seria um resultado destituído de utilidade prática, além de perigoso ... Neste caso, deveremos usar instrumentos indicadores de valor RMS. A solução mais simples consiste em incorporar um retificador de meia onda, ou de onda completa, ao circuito do medidor, sendo a escala (ou o display) calibrada em função dos valores eficazes de uma onda senoidal. Para outras formas de onda (como as encontradas em uma rede de energia alimentada por um transformador com o núcleo saturado, ou um sinal de áudio) o valor obtido não será exato. Para resolver este inconveniente, existem instrumentos que detectam o valor RMS, como os que usam termo par ou os que computam este valor. Em ambos os casos são denominados instrumentos True RMS, por fornecerem o valor RMS verdadeiro, independentemente da forma de onda (pelo menos teoricamente e dentro de uma faixa de frequências). Na Fig. 1, vemos cada uma das etapas envolvendo a obtenção do valor RMS, para uma tensão senoidal, propositalmente escolhida com 1 V de pico. Esta senoide, elevada ao quadrado, assumirá apenas valores positivos, variando cosenoidalmente (fase adiantada de 90 graus em relação ao seno), superposta a uma componente contínua de 0,5 Volt, que será o seu valor médio. Este valor médio, devido à simetria da forma de onda, pode ser obtido dividindo-se por dois a variação em amplitude, ou seja: $(1 - 0)/2 = 0,5 \text{ V}$. O valor RMS será igual a $\sqrt{0,5} = \sqrt{1/2} = 1/\sqrt{2} = 0,707 \text{ V}$.

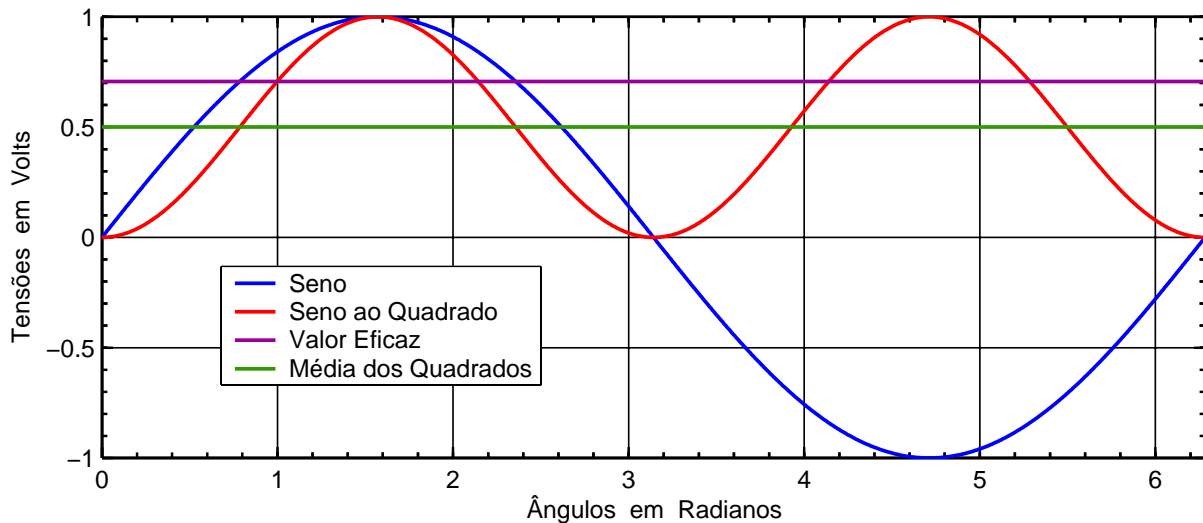


Fig. 1 – Obtenção do valor RMS, de uma onda senoidal, com 1 Volt de pico.

O que foi feito graficamente pode ser desenvolvido analiticamente, expressando-se a média quadrática de uma função $f(t)$, em um intervalo de tempo T (geralmente o período, para funções periódicas) como sendo a área sob a curva (dada pela integral), dividida por T . Por último, extrai-se a raiz quadrada para a obtenção do valor RMS. Para funções trigonométricas, é conveniente trabalhar com 2π radianos, no lugar de T , sendo a correspondência entre tempos e ângulos dada por $\theta = \omega \cdot t$, onde a velocidade angular, em rad/s, é igual a $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$, sendo f a frequência em Hz.

$$F_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T f(t)^2 \cdot dt} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(\theta)^2 \cdot d\theta}$$

Exemplificando com uma senoide, de valor máximo E_M (pico), teremos:

$$E_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T [E_M \cdot \text{sen}(\omega \cdot t)]^2 \cdot dt}$$

$$E_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} [E_M \cdot \text{sen}(\theta)]^2 \cdot d\theta}$$

Utilizando-se a identidade trigonométrica $[\text{sen}(\theta)]^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos(2\theta)$, vemos que a função seno, elevada ao quadrado, corresponde a uma componente contínua, de 0,5, somada a uma função coseno, invertida de 180 graus (sinal -), com 0,5 de amplitude máxima e frequência dobrada.

$$\begin{aligned} E_{RMS} &= \sqrt{\frac{E_M^2}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} [\text{sen}(\theta)]^2 \cdot d\theta} \\ &= \sqrt{\frac{E_M^2}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos(2\theta) \right] \cdot d\theta} \end{aligned}$$

Como a integral do seno (ou coseno) são iguais à zero, dentro de um número inteiro de períodos, devido à simetria, não precisaremos desenvolver a integral de $\cos(2\theta)$, entre 0 e 2π , já que esta será nula.

$$E_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{E_M^2}{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cdot d\theta - \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cdot \cos(2\theta) \cdot d\theta \right]}$$

$$= \sqrt{\frac{E_M^2}{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cdot d\theta - 0 \right]}$$

$$E_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{E_M^2}{2\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_0^{2\pi} d\theta}$$

$$= \sqrt{\frac{E_M^2}{4\pi} \cdot \int_0^{2\pi} d\theta} = \sqrt{\frac{E_M^2}{4\pi} \cdot [\theta]_0^{2\pi}}$$

$$E_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{E_M^2}{4\pi} \cdot [2\pi - 0]} = \sqrt{\frac{E_M^2}{4\pi} \cdot 2\pi} = \frac{E_M}{\sqrt{2}}$$

Por analogia, no caso de uma onda senoidal de corrente, teremos $I_{\text{RMS}} = \frac{I_M}{\sqrt{2}}$

Resumindo, os valores RMS, de tensão ou corrente, referentes às ondas senoidais, podem ser obtidos multiplicando-se os valores máximos por 0,707, o que equivale a dividi-los por $\sqrt{2}$.

Aplicando a lei de Ohm, em um circuito linear, puramente resistivo (ou na ressonância), alimentado por uma onda de tensão senoidal poderemos expressar a onda de potência instantânea conforme se segue :

$$\begin{aligned} p_{(t)} &= e_{(t)} \cdot i_{(t)} \\ &= E_M \cdot \text{sen}(\omega \cdot t) \cdot I_M \cdot \text{sen}(\omega \cdot t) \\ &= E_M \cdot I_M \cdot [\text{sen}(\omega \cdot t)]^2 \end{aligned}$$

$$p_{(t)} = \frac{e_{(t)}^2}{R} = \frac{E_M^2}{R} \cdot [\text{sen}(\omega \cdot t)]^2$$

ou, ainda,

$$p_{(t)} = R \cdot i_{(t)}^2 = R \cdot I_M^2 \cdot [\text{sen}(\omega \cdot t)]^2$$

Como podemos observar, nos três casos acima, a potência instantânea será sempre positiva (o que não é verdadeiro em circuitos reativos, ou seja, onde o ângulo de fase entre a tensão e a corrente é diferente de zero, o que pode ocorrer quando existem indutores e/ou capacitores no circuito).

A potência média, dentro de um período (ou de um número inteiro deles) pode ser expressa por:

$$P_{\text{ME}} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T p_{(t)} \cdot dt$$

$$= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T E_M \cdot I_M \cdot [\text{sen}(\omega \cdot t)]^2 \cdot dt$$

$$= \frac{E_M \cdot I_M}{T} \cdot \int_0^T [\text{sen}(\omega \cdot t)]^2 \cdot dt$$

$$P_{\text{ME}} = \frac{E_M \cdot I_M}{T} \cdot \left[\int_0^T \frac{dt}{2} - \int_0^T \frac{\cos(2 \cdot \omega \cdot t)}{2} \cdot dt \right]$$

$$= \frac{E_M \cdot I_M}{T} \cdot \left\{ \left[\frac{T}{2} \right]_0^T - 0 \right\}$$

$$= \frac{E_M \cdot I_M}{T} \cdot \left[\frac{T - 0}{2} \right]$$

$$P_{ME} = \frac{E_M \cdot I_M}{2} = \frac{E_M}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_M}{\sqrt{2}} = E_{RMS} \cdot I_{RMS}$$

$$P_{ME} = \frac{10}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{20}{2} = 10 \text{ Watts}$$

No caso de um circuito composto por um resistor de 5 Ohms, alimentado por uma tensão senoidal com 10 Volts de pico, teremos uma corrente com 2 Amperes de pico. A potência máxima será igual a 20 Watts e a potência média valerá 10 Watts. Multiplicando os valores RMS da tensão e da corrente, teremos:

O desenvolvimento acima, representado na Fig. 2, mostra que a potência média, no caso puramente resistivo senoidal, é igual à metade da potência de pico, e corresponde ao produto dos valores RMS da tensão e da corrente. Talvez tenha sido isto que levou à associação com o termo "potência RMS".

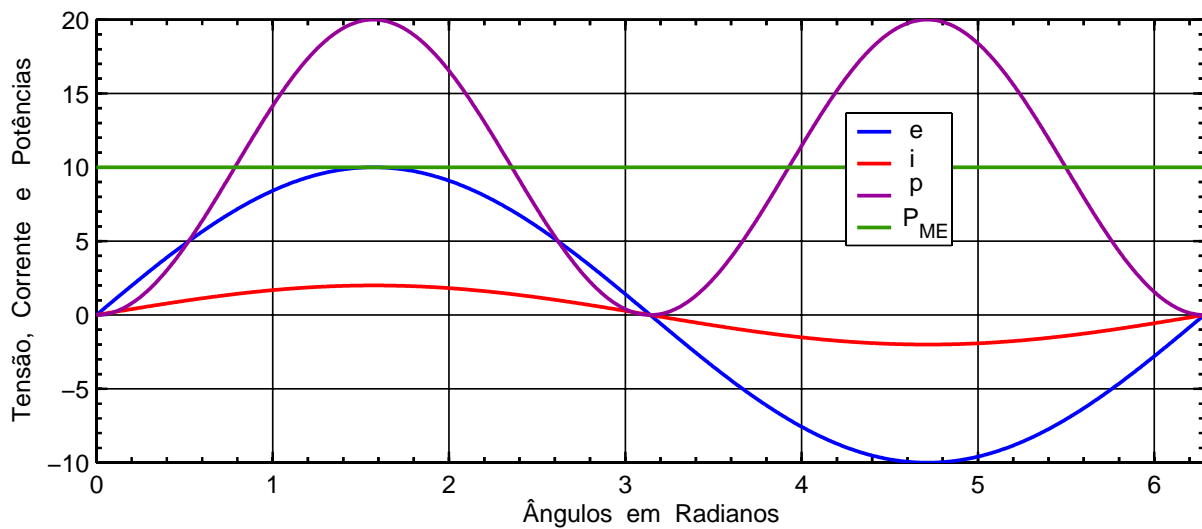


Fig. 2 – Formas de onda da tensão, corrente, potência instantânea e potência média em um resistor de 5 Ohms .

Mas, haveria uma potência RMS ?

No entender de Robert Ashley, pela própria definição de valor RMS, este valor seria obtido da seguinte maneira :

$$P_{RMS?} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T P_{(t)}^2 \cdot dt}$$

$$P_{RMS?} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \{E_M \cdot I_M \cdot [\text{sen}(\omega \cdot t)]^2\}^2 \cdot dt}$$

$$P_{RMS?} = E_M \cdot I_M \cdot \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [\text{sen}(\omega \cdot t)]^4 \cdot dt}$$

$$[\text{sen}(\theta)]^4 = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cdot \cos(2 \cdot \theta) + \frac{1}{8} \cdot \cos(4 \cdot \theta)$$

$$P_{RMS?} = E_M \cdot I_M \cdot \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cdot \cos(2 \cdot \theta) + \frac{1}{8} \cdot \cos(4 \cdot \theta) \right] \cdot d\theta}$$

$$P_{RMS?} = E_M \cdot I_M \cdot \sqrt{\frac{1}{2\pi} \cdot \left[\frac{3}{8} \cdot \int_0^{2\pi} d\theta - \frac{1}{2} \cdot \int_0^{2\pi} \cos(2 \cdot \theta) \cdot d\theta + \frac{1}{8} \cdot \int_0^{2\pi} \cos(4 \cdot \theta) \cdot d\theta \right]}$$

$$P_{RMS?} = E_M \cdot I_M \cdot \sqrt{\frac{1}{2\pi} \cdot \left[\frac{3}{8} \cdot \int_0^{2\pi} d\theta - 0 + 0 \right]} = E_M \cdot I_M \cdot \sqrt{\frac{3}{16\pi} \cdot \int_0^{2\pi} d\theta}$$

$$P_{RMS?} = E_M \cdot I_M \cdot \sqrt{\frac{3}{16\pi} [2\pi - 0]} = \sqrt{\frac{3}{8}} \cdot E_M \cdot I_M = \sqrt{\frac{3}{8}} \cdot 2 \cdot P_{ME} = \sqrt{\frac{12}{8}} \cdot P_{ME}$$

$$P_{RMS?} = \sqrt{1,5} \cdot P_{ME} = 1,2247 \cdot P_{ME}$$

Segundo Eargle e Locanthi, um amplificador de potência média igual a 81,3 Watts, poderia ser especificado como possuindo 100 $W_{RMS?}$, "sendo mais uma especificação de potência inflacionada".

Haveria a necessidade da utilização desta quantidade, denominada $P_{RMS?}$?

Acredito que não. Vejamos :

No caso de uma corrente alternada, se estivermos interessados no efeito Joule produzido, ou seja, o calor dissipado na componente resistiva de uma carga, o sentido da corrente teria alguma relevância ? Não !

Em um circuito, onde a diferença de fase entre a tensão e a corrente é diferente de zero, a onda de potência terá partes positivas e outras negativas.

Seria conveniente ocultarmos esta informação de sinal ?

Não, porque uma potência positiva significa que a carga absorveu energia do gerador, enquanto que potências negativas indicam que a carga devolveu energia para o gerador. Apenas como lembrete, potência é o resultado do cociente entre energia (trabalho) e tempo. Watt = Joule / segundo.

Assim, preservar a informação dada pelos sinais positivos e negativos é algo de interesse, nesse caso, não tendo sentido computar uma média (a quadrática) que tem exatamente a finalidade de eliminar a influência do sinal. Na Fig. 3, vemos a corrente, em um circuito puramente capacitivo, onde $C = 2,5 \mu F$, adiantada de 90 graus, em relação à tensão. A onda de potência é simétrica, sendo a potência média nula. A tensão senoidal aplicada tem um valor igual a 8 V RMS e uma frequência de 8 kHz. Nesta frequência, a reatância do capacitor foi igual a 8 Ohms daí a corrente apresentar um valor RMS igual a 1 A.

Na Fig. 4, temos os resultados obtidos após a colocação de um resistor de 8 Ohms, em série com o capacitor de $2,5 \mu F$. Na frequência de 8 kHz o ângulo de fase entre a tensão e a corrente será igual a 45 graus, e seu coseno vale 0,707. Desse modo, a potência média corresponderá a $8 \cdot 1 \cdot 0,707 = 5,6$ Watts.

Não poderíamos deixar de ressaltar que os valores RMS são os responsáveis pelo efeito Joule. Assim, a potência

dissipada em um resistor R será dada por:

$$P_{ME} = E_{RMS}^2 / R = R \cdot I_{RMS}^2$$

Desse modo, a tensão da rede de energia, com um valor nominal de 127 V RMS, que varia senoidalmente entre ±180 Volts e possui valor médio nulo, produz o mesmo

efeito Joule que uma tensão contínua com 127 V. Como o valor RMS produz o mesmo "efeito" térmico que uma tensão contínua, em português usaremos **valor eficaz**, no lugar de RMS.

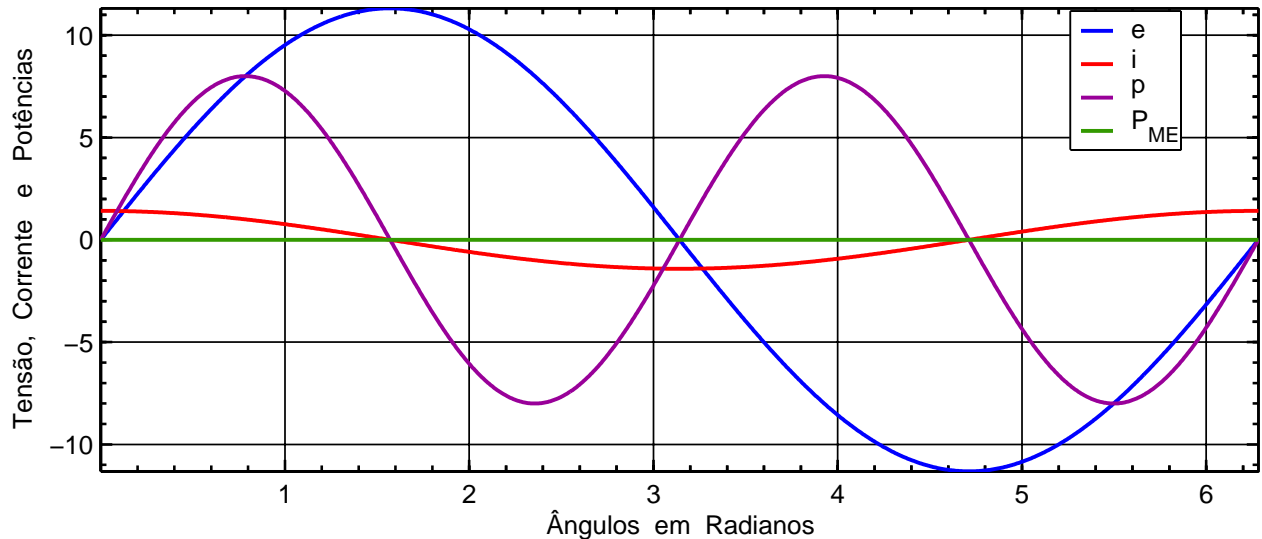


Fig. 3 –Tensão, corrente, potência instantânea e potência média em um capacitor de 2,5 μF a 8 kHz.

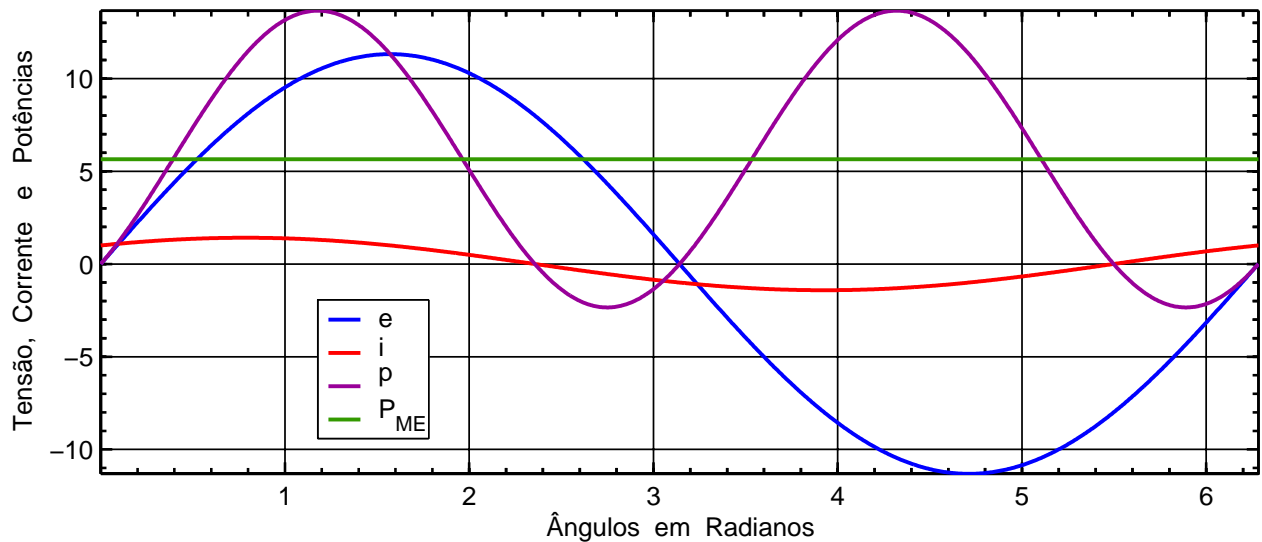


Fig. 4 –Tensão, corrente, e potências em um circuito RC série, onde R = 8 Ohms, C = 2,5 μF e f = 8 kHz .

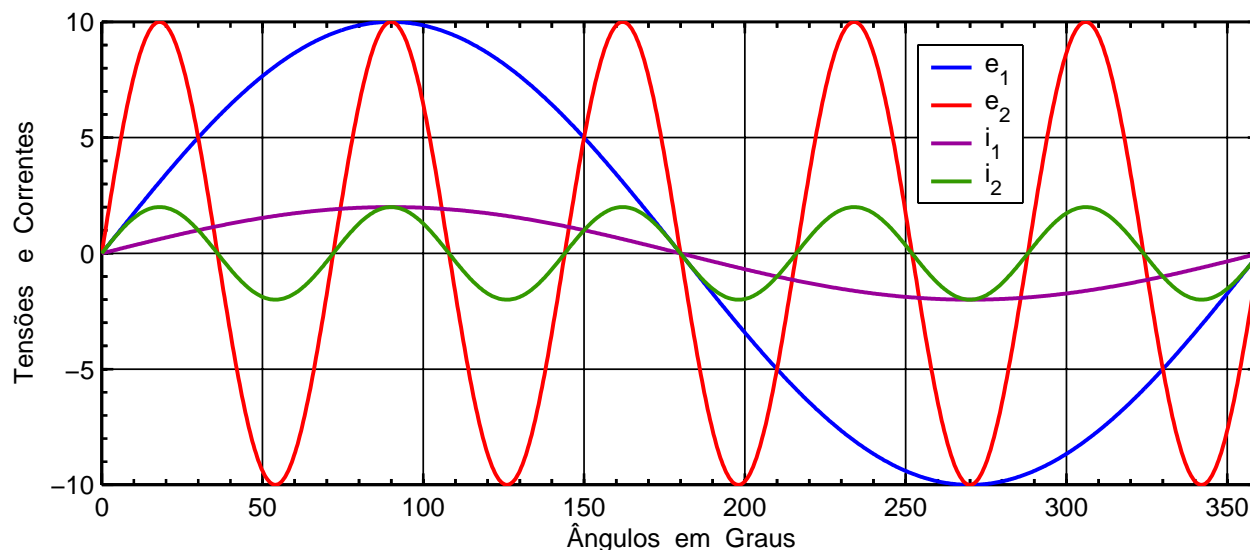


Fig. 5 – Tensão senoidal, com 10 V de pico, e quinto harmônico, de igual amplitude, em resistor de 5 Ohms .

Embora um amplificador de potência deva cumprir sua finalidade nominal, que é fornecer potência elétrica, não podemos nos restringir ao efeito Joule que é capaz de produzir. Uma especificação de potência média senoidal é mais adequada para retratar o comportamento térmico do circuito do que para avaliar o desempenho do amplificador em termos acústicos. Indicar o valor da distorção, associada a uma determinada potência é de extrema importância. No entanto, a distorção estará associada aos valores de pico, e não a valores médios de potência ou tensão. É nos picos de sinal que os amplificadores podem clidar.

Alem disso, em condições normais de uso, um amplificador não irá amplificar uma senoide, mas um sinal complexo que pode ser decomposto em um somatório de diversas componentes senoidais, com diferentes amplitudes e diferentes frequências.

Na Fig. 5, vemos uma fundamental, com 10 Volts de pico e sua quinta harmônica, com igual amplitude, e as respectivas componentes de corrente em uma carga de 5 Ohms, puramente resistiva. A Fig. 6 mostra as formas de onda da tensão

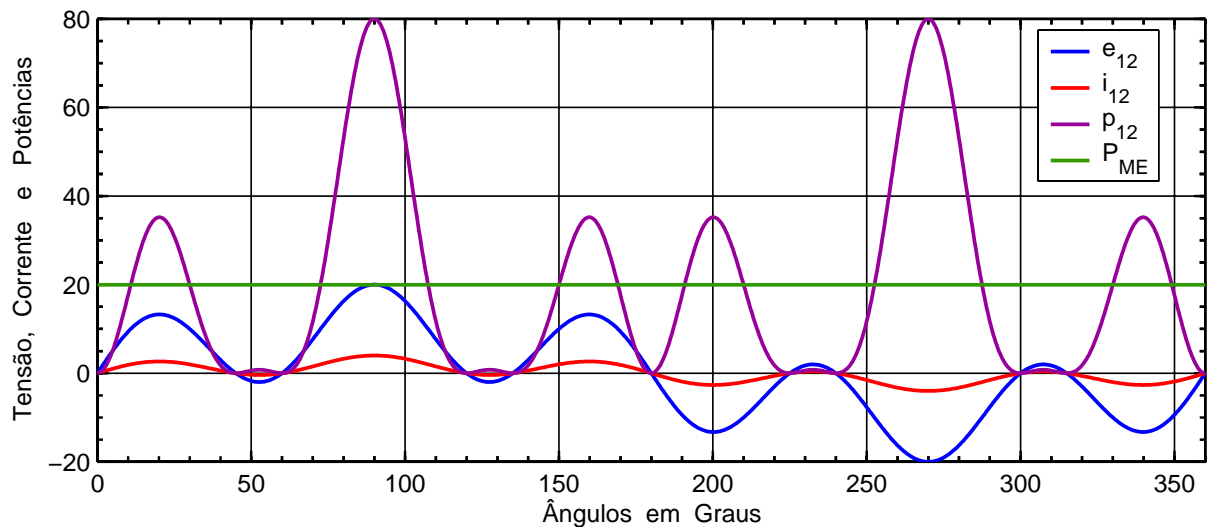
e da corrente resultantes e das potências média e instantânea.

A potência resultante será o resultado da superposição das potências fornecidas por cada uma das duas tensões aplicadas, sendo a potência média igual a 20 Watts.

$$\begin{aligned}
 P_{ME} &= P_{ME_1} + P_{ME_2} \\
 &= \frac{10^2/5}{2} + \frac{10^2/5}{2} = \frac{20}{2} + \frac{20}{2} \\
 &= 10 + 10 = 20 \text{ Watts}
 \end{aligned}$$

Observando a Fig. 6, vemos que, embora a potência média tenha sido igual a 20 Watts, a potência de pico foi igual a 80 Watts, o que obriga o amplificador a fornecer $\sqrt{80 \cdot 5} = 20$ Volts de pico.

No caso de uma única componente senoidal, bastariam 10 Volts eficazes para se conseguir os mesmos 20 Watts de potência média, mas com apenas 40 Watts de pico, situação em que o amplificador teria que fornecer 14 Volts de pico.



**Fig. 6 – Tensão, corrente e potências resultantes, correspondentes a Fig. 5 ,
onde $e_{12} = e_1 + e_2$, $i_{12} = i_1 + i_2$ e $p_{12} = p_1 + p_2$.**

Com o exemplo acima, fica claro que uma especificação de potência, perfeitamente adequada para caracterizar o efeito térmico, como é o caso da potência média, pode levar a conclusões enganosas quando o foco estiver centrado nos aspectos elétricos e auditivos. Um determinado amplificador pode fornecer um sinal de 14 ou 15 Volts de pico, com distorção mínima, mas distorcer acentuadamente quando solicitado a entregar 20 Volts de pico. O sinal musical caracteriza-se por elevadas potências de pico e potências médias baixas. O fator de crista representa exatamente isso, sendo o cociente entre as potências de pico e a média.

Valores Eficazes de Componentes Senoidais Múltiplas

No caso de uma componente contínua (que pode ser entendida como uma cossenoide de frequência zero ou período infinito) e outra senoidal, teremos:

$$e_1 = E \quad ; \quad e_2 = E_M \cdot \text{sen}(\omega \cdot t) \quad ;$$

$$e_{(t)} = e_1 + e_2$$

$$e_{(t)}^2 = (e_1 + e_2)^2 = e_1^2 + e_2^2 + 2 \cdot e_1 \cdot e_2$$

$$e_{(t)}^2 = E^2 + [E_M \cdot \text{sen}(\omega \cdot t)]^2 + 2 \cdot E \cdot E_M \cdot \text{sen}(\omega \cdot t)$$

$$E_{EF} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T e_{(t)}^2 \cdot dt} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e_{(\theta)}^2 \cdot d\theta}$$

$$E_{EF} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T \left\{ E^2 + [E_M \cdot \text{sen}(\omega \cdot t)]^2 + 2 \cdot E \cdot E_M \cdot \text{sen}(\omega \cdot t) \right\} \cdot dt}$$

$$E_{EF} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T E^2 \cdot dt + \frac{1}{T} \cdot \int_0^T [E_M \cdot \text{sen}(\omega \cdot t)]^2 \cdot dt + \frac{1}{T} \cdot \int_0^T [2 \cdot E \cdot E_M \cdot \text{sen}(\omega \cdot t)] \cdot dt}$$

$$E_{EF} = \sqrt{\frac{E^2}{T} \cdot \int_0^T dt + \frac{E_M^2}{T} \cdot \int_0^T [\text{sen}(\omega \cdot t)]^2 \cdot dt + \frac{2 \cdot E \cdot E_M}{T} \cdot \int_0^T [\text{sen}(\omega \cdot t)] \cdot dt}$$

$$E_{EF} = \sqrt{\frac{E^2}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} d\theta + \frac{E_M^2}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} [\text{sen}(\theta)]^2 \cdot d\theta + \frac{2 \cdot E \cdot E_M}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} [\text{sen}(\theta)] \cdot d\theta}$$

Como as integrais do seno e do cosseno, dentro de um numero inteiro de períodos, são nulas, então:

$$[\text{sen}(\theta)]^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos(2 \cdot \theta), \text{ logo, } \int_0^{2\pi} [\text{sen}(\theta)]^2 \cdot d\theta = \left[\frac{d\theta}{2} \right]_0^{2\pi} = \frac{2\pi - 0}{2} = \pi$$

$$E_{EF} = \sqrt{\frac{E^2}{2\pi} \cdot 2 \cdot \pi + \frac{E_M^2}{2\pi} \cdot \pi + 0} = \sqrt{E^2 + \frac{E_M^2}{2}} = \sqrt{E^2 + E_{EF}^2}$$

Para uma tensão contínua igual a 3 V e uma tensão senoidal com 4 V_{EF}, teremos como resultado

$$\sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5 \text{ V}_{EF}.$$

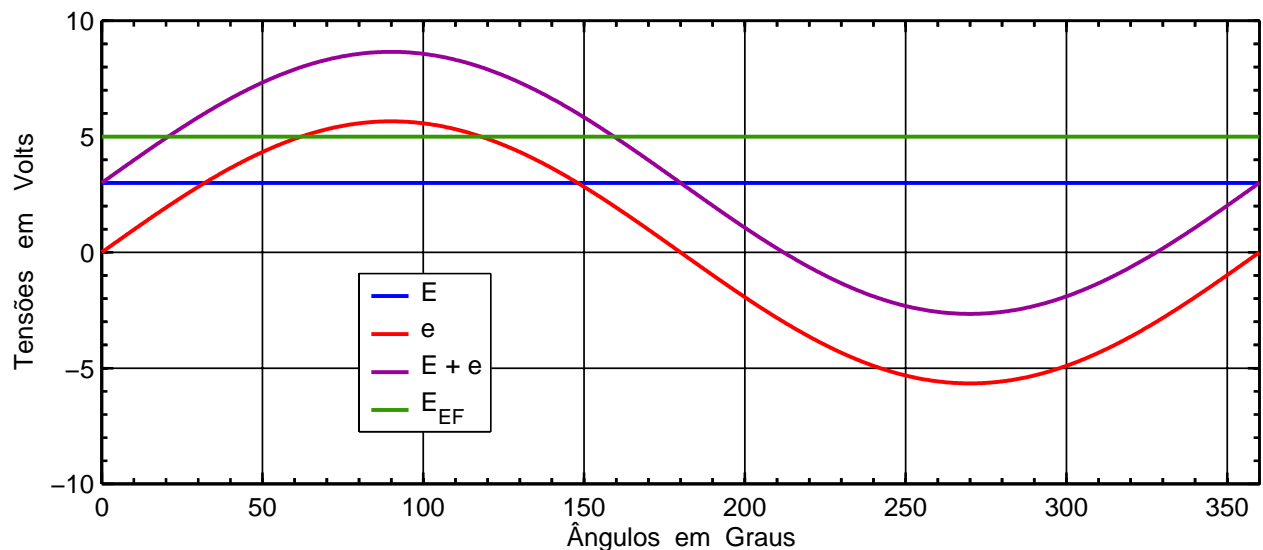


Fig. 7 – Componente alternada de 4 V_{EF}, superposta a uma tensão contínua de 3 V resultando em 5 V_{EF}.

Duas componentes senoidais, de frequências diferentes

$$e_1 = E_{M_1} \cdot \text{sen}(\omega_1 \cdot t) \quad ; \quad e_2 = E_{M_2} \cdot \text{sen}(\omega_2 \cdot t) \quad ; \quad e_{(t)} = e_1 + e_2$$

$$e_{(t)}^2 = (e_1 + e_2)^2 = e_1^2 + e_2^2 + 2 \cdot e_1 \cdot e_2 = [E_{M_1} \cdot \text{sen}(\omega_1 \cdot t)]^2 + [E_{M_2} \cdot \text{sen}(\omega_2 \cdot t)]^2 + \dots \\ + 2 \cdot E_{M_1} \cdot \text{sen}(\omega_1 \cdot t) \cdot E_{M_2} \cdot \text{sen}(\omega_2 \cdot t)$$

$$E_{EF} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T \left\{ [E_{M_1} \cdot \text{sen}(\omega_1 \cdot t)]^2 + [E_{M_2} \cdot \text{sen}(\omega_2 \cdot t)]^2 + 2 \cdot E_{M_1} \cdot E_{M_2} \cdot \text{sen}(\omega_1 \cdot t) \cdot \text{sen}(\omega_2 \cdot t) \right\} \cdot dt}$$

$$E_{EF} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \left\{ [E_{M_1} \cdot \text{sen}(\theta_1)]^2 + [E_{M_2} \cdot \text{sen}(\theta_2)]^2 + 2 \cdot E_{M_1} \cdot E_{M_2} \cdot \text{sen}(\theta_1) \cdot \text{sen}(\theta_2) \right\} \cdot d\theta}$$

$$E_{EF}^2 = \frac{E_{M_1}^2}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} [\text{sen}(\theta_1)]^2 \cdot d\theta + \frac{E_{M_2}^2}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} [\text{sen}(\theta_2)]^2 \cdot d\theta + \frac{E_{M_1} \cdot E_{M_2}}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \text{sen}(\theta_1) \cdot \text{sen}(\theta_2) \cdot d\theta$$

$$E_{EF}^2 = \frac{E_{M_1}^2}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} [\text{sen}(\theta_1)]^2 \cdot d\theta + \frac{E_{M_2}^2}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} [\text{sen}(\theta_2)]^2 \cdot d\theta + \frac{E_{M_1} \cdot E_{M_2}}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \text{sen}(\theta_1) \cdot \text{sen}(\theta_2) \cdot d\theta$$

Como $[\text{sen}(\theta)]^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos(2 \cdot \theta)$ então

$$\int_0^{2\pi} [\text{sen}(\theta)]^2 \cdot d\theta = \frac{1}{2} \cdot [\theta]_0^{2\pi} = \frac{1}{2} \cdot [2\pi - 0] = \pi$$

$$\text{sen}(\theta_1) \cdot \text{sen}(\theta_2) = \frac{1}{2} \cdot \cos(\theta_1 - \theta_2) - \frac{1}{2} \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2), \text{ logo, } \int_0^{2\pi} \text{sen}(\theta_1) \cdot \text{sen}(\theta_2) \cdot d\theta = 0$$

$$\text{Então, } E_{EF}^2 = \frac{E_{M_1}^2}{2\pi} \cdot \pi + \frac{E_{M_2}^2}{2\pi} \cdot \pi + 0 = \frac{E_{M_1}^2}{2} + \frac{E_{M_2}^2}{2} = E_{EF_1}^2 + E_{EF_2}^2$$

$$E_{EF} = \sqrt{E_{EF_1}^2 + E_{EF_2}^2}$$

Para uma tensão senoidal com 4 V_{EF} e uma outra tensão senoidal com 3 V_{EF} , e frequência três vezes maior, e fase zero, teremos:

$$\sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5 V_{EF} .$$

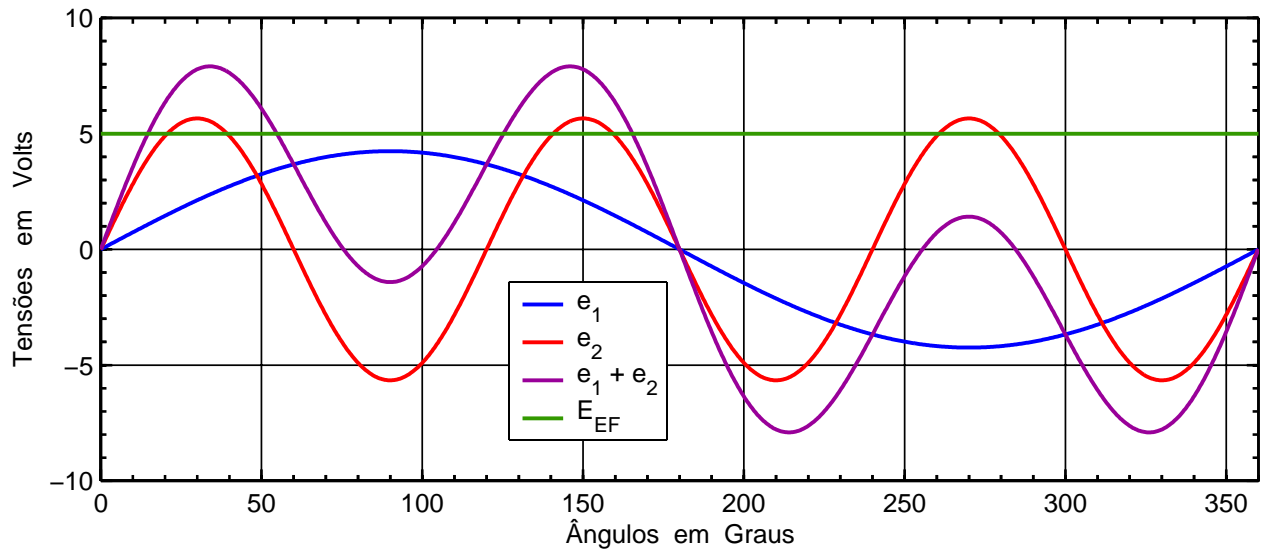


Fig. 8 – Componentes alternadas, com 3 V_{EF} e 4 V_{EF}, com a mesma fase e o triplo da frequência, uma da outra.

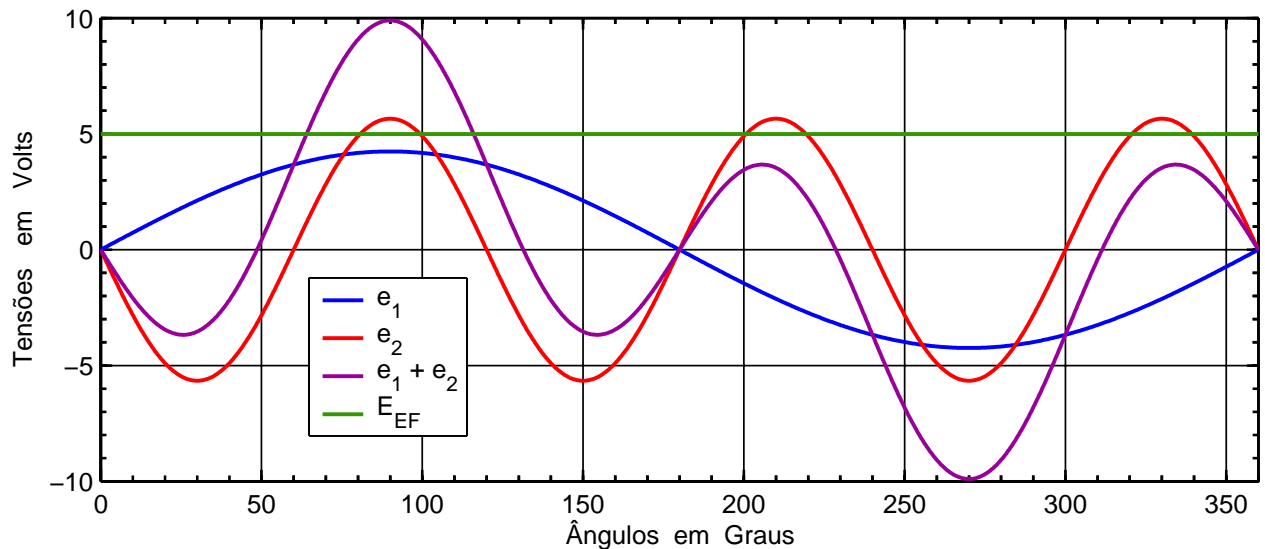


Fig. 9 – Componentes alternadas, com 3 V_{EF} e 4 V_{EF}, o triplo da frequência, e 180 graus de defasagem uma da outra.

Embora a diferença de fase entre as componentes de frequências diferentes não altere o valor eficaz final, as tensões resultantes são diferentes, como podemos ver nas Figs. 8 e 9 .

Três componentes senoidais, de frequências diferentes (podendo incluir uma componente continua)

$$e_{(t)} = e_1 + e_2 + e_3 \quad \text{fazendo} \quad e_{12} = e_1 + e_2 \quad \text{vem:} \quad e_{(t)} = e_{12} + e_3$$

$$e_{(t)}^2 = e_{12}^2 + e_3^2 + 2 \cdot e_{12} \cdot e_3 = (e_1 + e_2)^2 + e_3^2 + 2 \cdot (e_1 + e_2) \cdot e_3$$

$$e_{(t)}^2 = e_1^2 + e_2^2 + 2 \cdot e_1 \cdot e_2 + e_3^2 + 2 \cdot (e_1 + e_2) \cdot e_3$$

$e_{(t)}^2 = e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + 2 \cdot e_1 \cdot e_2 + 2 \cdot e_1 \cdot e_3 + 2 \cdot e_2 \cdot e_3$ (somatório de quadrados e duplos produtos)

$$\frac{1}{T} \cdot \int_0^T e_{(t)}^2 \cdot dt = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T e_1^2 \cdot dt + \frac{1}{T} \cdot \int_0^T e_2^2 \cdot dt + \frac{1}{T} \cdot \int_0^T e_3^2 \cdot dt + \frac{2}{T} \cdot \int_0^T e_1 \cdot e_2 \cdot dt + \frac{2}{T} \cdot \int_0^T e_1 \cdot e_3 \cdot dt + \frac{2}{T} \cdot \int_0^T e_2 \cdot e_3 \cdot dt$$

$$e_1 = E_{M_1} \cdot \text{sen}(\omega_1 \cdot t) \quad ; \quad e_2 = E_{M_2} \cdot \text{sen}(\omega_2 \cdot t) \quad ; \quad e_3 = E_{M_3} \cdot \text{sen}(\omega_3 \cdot t)$$

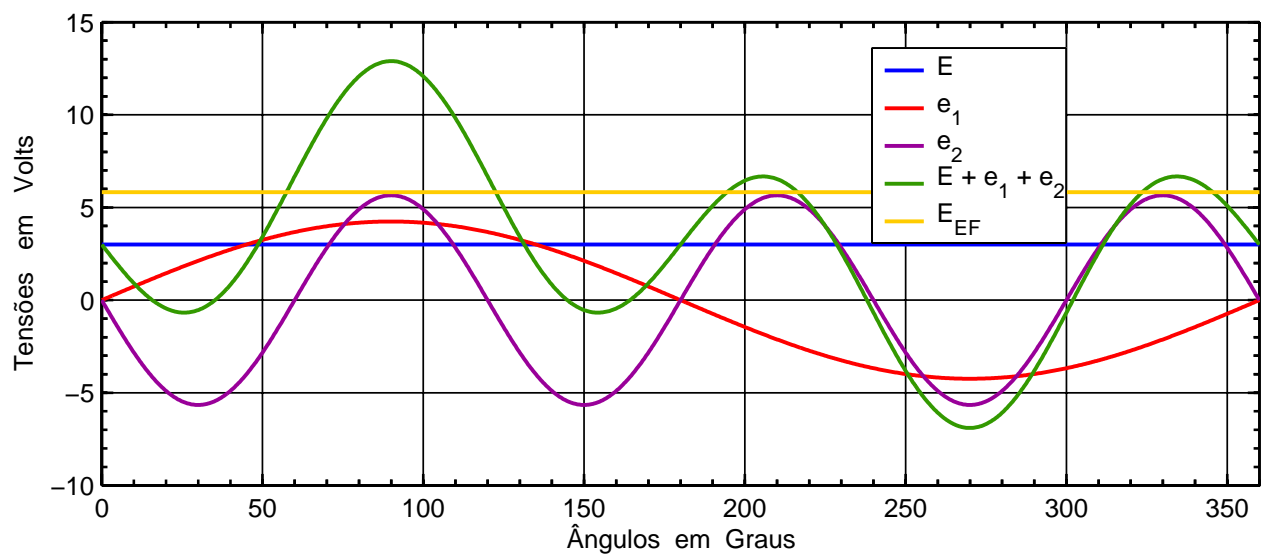


Fig. 10 – Tensão contínua com 3 V e componentes alternadas com 3 V_{EF} e 4 V_{EF}, e o triplo da frequência uma da outra.

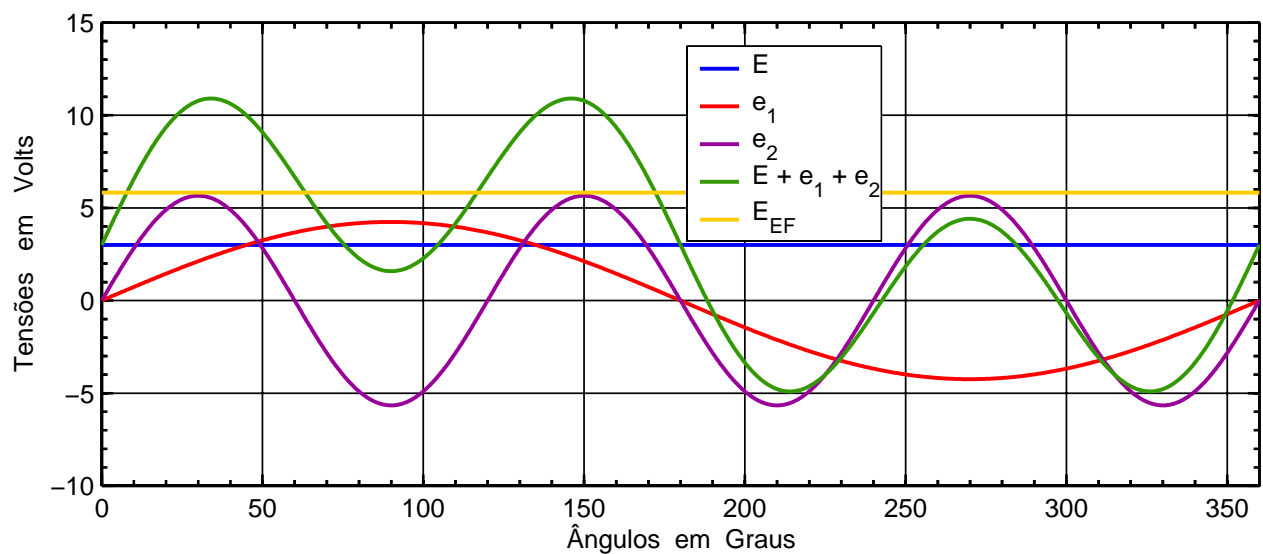


Fig. 11 – As mesmas formas de onda, mas sem defasagem entre as componentes senoidais .

$$e_1^2 = E_{M_1}^2 \cdot [\text{sen}(\omega_1 \cdot t)]^2$$

$$= E_{M_1}^2 \cdot \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos(2 \cdot \omega_1 \cdot t) \right]$$

$$\frac{1}{T} \cdot \int_0^T e_1^2 \cdot dt =$$

$$\frac{E_{M_1}^2}{2 \cdot T} \int_0^T dt - \frac{E_{M_1}^2}{2 \cdot T} \cdot \int_0^T \cos(2 \cdot \omega_1 \cdot t) \cdot dt =$$

$$\frac{E_{M_1}^2}{2 \cdot T} \cdot [T - 0] - 0 = \frac{E_{M_1}^2}{2} = E_{EF_1}^2$$

Por analogia:

$$\frac{1}{T} \int_0^T e_2^2 \cdot dt = E_{EF_2}^2 \quad ; \quad \frac{1}{T} \int_0^T e_3^2 \cdot dt = E_{EF_3}^2$$

$$\text{Como } \frac{1}{T} \int_0^T \text{sen}(\omega_1 \cdot t) \cdot \text{sen}(\omega_2 \cdot t) \cdot dt = 0$$

(ver identidade trigonométrica, adiante),

$$E_{EF}^2 = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T e_{(t)}^2 \cdot dt = E_{EF_1}^2 + E_{EF_2}^2 + E_{EF_3}^2$$

$$E_{EF} = \sqrt{E_{EF_1}^2 + E_{EF_2}^2 + E_{EF_3}^2}$$

Calculando para os valores numéricos das Figs. 10 e 11, onde vemos que a defasagem entre as componentes senoidais não afeta o valor eficaz resultante, vem:

$$\begin{aligned} E_{EF} &= \sqrt{3^2 + 3^2 + 4^2} = \\ &= \sqrt{9 + 9 + 16} = \\ &= \sqrt{34} = 5,8 \end{aligned}$$

Estendendo para n termos

$$E_{EF} = \sqrt{E_{EF_1}^2 + E_{EF_2}^2 + E_{EF_3}^2 + \dots + E_{EF_N}^2}$$

Duas senoides de mesma frequência e ângulos de fase quaisquer

$$e_1 = E_{M_1} \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \alpha_1)$$

$$e_2 = E_{M_2} \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \alpha_2)$$

$$e_{(t)} = e_1 + e_2$$

$$e_{(t)}^2 = (e_1 + e_2)^2 = e_1^2 + e_2^2 + 2 \cdot e_1 \cdot e_2$$

$$e_{(t)}^2 = E_{M_1}^2 \cdot [\text{sen}(\omega \cdot t + \alpha_1)]^2 + \dots$$

$$+ E_{M_2}^2 \cdot [\text{sen}(\omega \cdot t + \alpha_2)]^2 + \dots$$

$$+ 2 \cdot E_{M_1} \cdot E_{M_2} \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \alpha_1) \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \alpha_2)$$

Identidades trigonométricas

$$\text{sen}(\omega \cdot t + \alpha) =$$

$$\text{sen}(\omega \cdot t) \cdot \cos(\alpha) + \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\omega \cdot t) =$$

$$\cos(\alpha) \cdot \text{sen}(\omega \cdot t) + \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$[\text{sen}(\omega \cdot t)]^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot t)$$

$$[\cos(\omega \cdot t)]^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot t)$$

$$\text{sen}(\omega \cdot t) \cdot \cos(\omega \cdot t) = \frac{1}{2} \cdot \text{sen}(2 \cdot \omega \cdot t)$$

$$\begin{aligned} \text{sen}(\omega_1 \cdot t) \cdot \text{sen}(\omega_2 \cdot t) &= \frac{1}{2} \cdot \cos[(\omega_1 - \omega_2) \cdot t] + \dots \\ &\quad - \frac{1}{2} \cdot \cos[(\omega_1 + \omega_2) \cdot t] \end{aligned}$$

$$\text{sen}(\omega \cdot t + \alpha_1) \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \alpha_2) = \frac{1}{2} \cdot \cos(\alpha_1 - \alpha_2) - \frac{1}{2} \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot t + \alpha_1 + \alpha_2)$$

$$\begin{aligned} [\text{sen}(\omega \cdot t + \alpha)]^2 &= [\text{sen}(\omega \cdot t) \cdot \cos(\alpha)]^2 + [\text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\omega \cdot t)]^2 + \dots \\ &+ 2 \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \text{sen}(\omega \cdot t) \cdot \cos(\omega \cdot t) \\ &= [\cos(\alpha)]^2 \cdot \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot t) \right] + [\text{sen}(\alpha)]^2 \cdot \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot t) \right] + \dots \\ &\dots + \frac{1}{2} \cdot \text{sen}(2 \cdot \alpha) \cdot \text{sen}(2 \cdot \omega \cdot t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\text{sen}(\omega \cdot t + \alpha)]^2 &= \frac{[\cos(\alpha)]^2}{2} - \frac{[\cos(\alpha)]^2}{2} \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot t) + \dots \\ &\dots + \frac{[\text{sen}(\alpha)]^2}{2} + \frac{[\text{sen}(\alpha)]^2}{2} \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot t) + \dots \\ &\dots + \frac{1}{2} \cdot \text{sen}(2 \cdot \alpha) \cdot \text{sen}(2 \cdot \omega \cdot t) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{T} \cdot \int_0^T e_{(t)}^2 \cdot dt = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T e_1^2 \cdot dt + \frac{1}{T} \cdot \int_0^T e_2^2 \cdot dt + \frac{2}{T} \cdot \int_0^T e_1 \cdot e_2 \cdot dt \quad \text{Substituindo, vem :}$$

$$e_{(t)}^2 = E_{M_1}^2 \cdot [\text{sen}(\omega \cdot t + \alpha_1)]^2 + E_{M_2}^2 \cdot [\text{sen}(\omega \cdot t + \alpha_2)]^2 + 2 \cdot E_{M_1} \cdot E_{M_2} \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \alpha_1) \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \alpha_2)$$

$$\begin{aligned} e_{(t)}^2 &= \frac{E_{M_1}^2 \cdot [\cos(\alpha_1)]^2}{2} - \frac{E_{M_1}^2 \cdot [\cos(\alpha_1)]^2}{2} \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot t) + \dots \\ &\dots + \frac{E_{M_1}^2 \cdot [\text{sen}(\alpha_1)]^2}{2} + \frac{E_{M_1}^2 \cdot [\text{sen}(\alpha_1)]^2}{2} \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot t) + \dots \\ &\dots + \frac{E_{M_1}^2}{2} \cdot \text{sen}(2 \cdot \alpha_1) \cdot \text{sen}(2 \cdot \omega \cdot t) + \dots \\ &\dots + \frac{E_{M_2}^2 \cdot [\cos(\alpha_2)]^2}{2} - \frac{E_{M_2}^2 \cdot [\cos(\alpha_2)]^2}{2} \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot t) + \dots \\ &\dots + \frac{E_{M_2}^2 \cdot [\text{sen}(\alpha_2)]^2}{2} + \frac{E_{M_2}^2 \cdot [\text{sen}(\alpha_2)]^2}{2} \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot t) + \dots \\ &\dots + \frac{E_{M_2}^2}{2} \cdot \text{sen}(2 \cdot \alpha_2) \cdot \text{sen}(2 \cdot \omega \cdot t) + \dots \\ &\dots + E_{M_1} \cdot E_{M_2} \cdot \cos(\alpha_1 - \alpha_2) - E_{M_1} \cdot E_{M_2} \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot t + \alpha_1 + \alpha_2) \end{aligned}$$

$$E_{EF}^2 = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T e^2 dt = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \frac{E_{M_1}^2 \cdot [\cos(\alpha_1)]^2}{2} \cdot dt - \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \frac{E_{M_1}^2 \cdot [\cos(\alpha_1)]^2}{2} \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot t) \cdot dt + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \frac{E_{M_1}^2 \cdot [\sin(\alpha_1)]^2}{2} \cdot dt + \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \frac{E_{M_1}^2 \cdot [\sin(\alpha_1)]^2}{2} \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot t) \cdot dt + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \frac{E_{M_1}^2}{2} \cdot \sin(2 \cdot \alpha_1) \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot t) \cdot dt + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \frac{E_{M_2}^2 \cdot [\cos(\alpha_2)]^2}{2} \cdot dt - \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \frac{E_{M_2}^2 \cdot [\cos(\alpha_2)]^2}{2} \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot t) \cdot dt + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \frac{E_{M_2}^2 \cdot [\sin(\alpha_2)]^2}{2} \cdot dt + \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \frac{E_{M_2}^2 \cdot [\sin(\alpha_2)]^2}{2} \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot t) \cdot dt + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \frac{E_{M_2}^2}{2} \cdot \sin(2 \cdot \alpha_2) \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot t) \cdot dt + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{T} \cdot \int_0^T E_{M_1} \cdot E_{M_2} \cdot \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \cdot dt - \frac{1}{T} \cdot \int_0^T E_{M_1} \cdot E_{M_2} \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot t + \alpha_1 + \alpha_2) \cdot dt$$

$$E_{EF}^2 = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \frac{E_{M_1}^2 \cdot [\cos(\alpha_1)]^2}{2} \cdot dt - 0 + \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \frac{E_{M_1}^2 \cdot [\sin(\alpha_1)]^2}{2} \cdot dt + 0 + 0 + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \frac{E_{M_2}^2 \cdot [\cos(\alpha_2)]^2}{2} \cdot dt - 0 + \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \frac{E_{M_2}^2 \cdot [\sin(\alpha_2)]^2}{2} \cdot dt + 0 + 0 + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{T} \cdot \int_0^T E_{M_1} \cdot E_{M_2} \cdot \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \cdot dt - 0$$

$$E_{EF}^2 = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \frac{E_{M_1}^2 \cdot [\cos(\alpha_1)]^2}{2} \cdot dt + \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \frac{E_{M_1}^2 \cdot [\sin(\alpha_1)]^2}{2} \cdot dt + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \frac{E_{M_2}^2 \cdot [\cos(\alpha_2)]^2}{2} \cdot dt + \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \frac{E_{M_2}^2 \cdot [\sin(\alpha_2)]^2}{2} \cdot dt + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{T} \cdot \int_0^T E_{M_1} \cdot E_{M_2} \cdot \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \cdot dt$$

$$E_{EF}^2 = \frac{E_{M_1}^2 \cdot [\cos(\alpha_1)]^2}{2 \cdot T} \cdot \int_0^T dt + \frac{E_{M_1}^2 \cdot [\text{sen}(\alpha_1)]^2}{2 \cdot T} \cdot \int_0^T dt + \dots$$

$$\dots + \frac{E_{M_2}^2 \cdot [\cos(\alpha_2)]^2}{2 \cdot T} \cdot \int_0^T dt + \frac{E_{M_2}^2 \cdot [\text{sen}(\alpha_2)]^2}{2 \cdot T} \cdot \int_0^T dt + \dots$$

$$\dots + \frac{E_{M_1} \cdot E_{M_2} \cdot \cos(\alpha_1 - \alpha_2)}{T} \cdot \int_0^T dt$$

$$E_{EF}^2 = \frac{E_{M_1}^2 \cdot [\cos(\alpha_1)]^2}{2 \cdot T} \cdot [t]_0^T + \frac{E_{M_1}^2 \cdot [\text{sen}(\alpha_1)]^2}{2 \cdot T} \cdot [t]_0^T + \dots$$

$$\dots + \frac{E_{M_2}^2 \cdot [\cos(\alpha_2)]^2}{2 \cdot T} \cdot [t]_0^T + \frac{E_{M_2}^2 \cdot [\text{sen}(\alpha_2)]^2}{2 \cdot T} \cdot [t]_0^T + \dots$$

$$\dots + \frac{E_{M_1} \cdot E_{M_2} \cdot \cos(\alpha_1 - \alpha_2)}{T} \cdot [t]_0^T$$

$$E_{EF}^2 = \frac{E_{M_1}^2 \cdot [\cos(\alpha_1)]^2}{2 \cdot T} \cdot [T - 0] + \frac{E_{M_1}^2 \cdot [\text{sen}(\alpha_1)]^2}{2 \cdot T} \cdot [T - 0] + \dots$$

$$\dots + \frac{E_{M_2}^2 \cdot [\cos(\alpha_2)]^2}{2 \cdot T} \cdot [T - 0] + \frac{E_{M_2}^2 \cdot [\text{sen}(\alpha_2)]^2}{2 \cdot T} \cdot [T - 0] + \dots$$

$$\dots + \frac{E_{M_1} \cdot E_{M_2} \cdot \cos(\alpha_1 - \alpha_2)}{T} \cdot [T - 0]$$

$$E_{EF}^2 = \frac{E_{M_1}^2 \cdot [\cos(\alpha_1)]^2}{2} + \frac{E_{M_1}^2 \cdot [\text{sen}(\alpha_1)]^2}{2} + \frac{E_{M_2}^2 \cdot [\cos(\alpha_2)]^2}{2} + \frac{E_{M_2}^2 \cdot [\text{sen}(\alpha_2)]^2}{2} + E_{M_1} \cdot E_{M_2} \cdot \cos(\alpha_1 - \alpha_2)$$

$$E_{EF}^2 = \frac{E_{M_1}^2}{2} \cdot \{[\cos(\alpha_1)]^2 + [\text{sen}(\alpha_1)]^2\} + \frac{E_{M_2}^2}{2} \cdot \{[\cos(\alpha_2)]^2 + [\text{sen}(\alpha_2)]^2\} + E_{M_1} \cdot E_{M_2} \cdot \cos(\alpha_1 - \alpha_2)$$

Como $[\cos(\alpha)]^2 + [\text{sen}(\alpha)]^2 = 1$

$$E_{EF}^2 = \frac{E_{M_1}^2}{2} \cdot \{1\} + \frac{E_{M_2}^2}{2} \cdot \{1\} + E_{M_1} \cdot E_{M_2} \cdot \cos(\alpha_1 - \alpha_2)$$

$$E_{EF}^2 = \frac{E_{M_1}^2}{2} + \frac{E_{M_2}^2}{2} + E_{M_1} \cdot E_{M_2} \cdot \cos(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{1}{2} \cdot [E_{M_1}^2 + E_{M_2}^2 + 2 \cdot E_{M_1} \cdot E_{M_2} \cdot \cos(\alpha_1 - \alpha_2)]$$

$$E_{EF}^2 = \frac{1}{2} \cdot [2 \cdot E_{EF_1}^2 + 2 \cdot E_{EF_2}^2 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot E_{EF_1} \cdot \sqrt{2} \cdot E_{EF_2} \cdot \cos(\alpha_1 - \alpha_2)]$$

$$E_{EF}^2 = E_{EF_1}^2 + E_{EF_2}^2 + \sqrt{2} \cdot E_{EF_1} \cdot \sqrt{2} \cdot E_{EF_2} \cdot \cos(\alpha_1 - \alpha_2)$$

$$E_{EF}^2 = E_{EF_1}^2 + E_{EF_2}^2 + 2 \cdot E_{EF_1} \cdot E_{EF_2} \cdot \cos(\alpha_1 - \alpha_2)$$

$$E_{EF} = \sqrt{E_{EF_1}^2 + E_{EF_2}^2 + 2 \cdot E_{EF_1} \cdot E_{EF_2} \cdot \cos(\alpha_1 - \alpha_2)}$$

Casos Particulares :

$$E_{EF} = \sqrt{E_{EF_1}^2 + E_{EF_2}^2 + 2 \cdot E_{EF_1} \cdot E_{EF_2}}$$

Se $\alpha_1 - \alpha_2 = 180^\circ$ logo,

$$= \sqrt{(E_{EF_1} + E_{EF_2})^2} = E_{EF_1} + E_{EF_2}$$

$$E_{EF} = \sqrt{E_{EF_1}^2 + E_{EF_2}^2 + 2 \cdot E_{EF_1} \cdot E_{EF_2} \cdot \cos(180^\circ)}$$

Como podemos constatar, caso a diferença de fase entre as duas senoides, de igual frequência, seja 0° ou 180° , os valores eficazes somam-se algebricamente.

$$E_{EF} = \sqrt{E_{EF_1}^2 + E_{EF_2}^2 - 2 \cdot E_{EF_1} \cdot E_{EF_2}}$$

$$= \sqrt{(E_{EF_1} - E_{EF_2})^2} = |E_{EF_1} - E_{EF_2}|$$

Supondo duas componentes senoidais, com valores eficazes de 3 e 4 V, defasadas de 180 graus, vem:

Se $E_{EF_1} = E_{EF_2}$ logo,

$$E_{EF} = \sqrt{3^2 + 4^2 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot (-1)}$$

$$E_{EF} = E_{EF_1} - E_{EF_2} = 0$$

$$= \sqrt{9 + 16 - 24}$$

Se $\alpha_1 = \alpha_2$ logo,

$$= \sqrt{25 - 24} = 1 \text{ V} = |3 - 4|$$

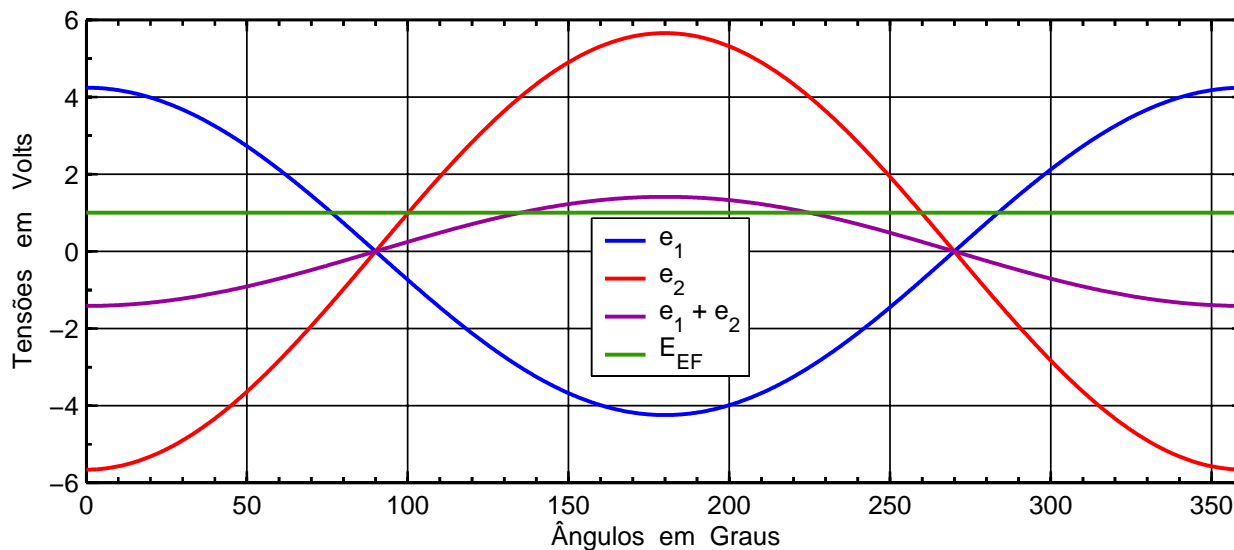


Fig. 12 – Duas componentes senoidais, de mesma frequência, defasadas de 180 graus, com 3 e 4 V_{EF} de amplitude .

Conforme ficou bem claro, através do desenvolvimento, o caso referente à senoides de mesma frequência, e ângulos de fase diferentes de 0 ou 180 graus, constitui-se no mais complexo de todos.

Bibliografia

1 - What's a Watt (RMS) ?

J. R Ashley

Journal of The Audio Engineering Society
Vol. 19 Nº 9, Outubro de 1971

2 - RMS Power: Fact or Fancy.

J. M. Eargle e B. Locanthi

Journal of The Audio Engineering Society
Vol. 20 Nº 1, Jan/Fev de 1972

3 - Comments on "What's a Watt (RMS) ?"

J. G. McKnight

Journal of The Audio Engineering Society
Vol. 20 Nº 1, Jan/Fev de 1972

4 - Power Specification Conversion Factors

T. A. Saponas

Journal of The Audio Engineering Society
Vol. 20 Nº 3, Abril de 1972

5 - Misnomer "RMS Power"

P. W. Klipsch

Journal of The Audio Engineering Society
Vol. 20 Nº 5, Junho de 1972

6 - "RMS Power" Versus Average Power

D. A. Kerr

Journal of The Audio Engineering Society
Vol. 20 Nº 5, Junho de 1972

7 - On Accurate Terminology

J. R. Ashley

Journal of The Audio Engineering Society
Vol. 20 Nº 6, Jul/Ago de 1972

8 - Advantages of Using Peak Power Ratings Instead of Average Power
J. G. McKnight
Journal of The Audio Engineering Society
Vol. 20 Nº 7, Setembro de 1972

9 - "Misnomer RMS Power" or "RMS Power Versus Average Power"
H. A. Bondy
Journal of The Audio Engineering Society
Vol. 20 Nº 8, Outubro de 1972

10 - More About "RMS Power"
R. R. Moore
Journal of The Audio Engineering Society
Vol. 20 Nº 8, Outubro de 1972

11 - Power Specifications
R. D. Read
Journal of The Audio Engineering Society
Vol. 20 Nº 9, Novembro de 1972

12 - Curso Selenium, CURSEL1
Notas de Aula, versão 10-10-2002
Disponível em www.selenium.com.br

13 - Amplificadores de Áudio –
Fundamentos, Características, Aplicações.
Rosalfonso Bortoni
H. Sheldon Serviços de Marketing, Outono
de 2002

14 – Interface Amplificador Falante em
Regime de Alta Potência
Ruy L. B. Monteiro
Apresentado na 4ª Convenção da AES –
Brasil em Junho de 2000
Disponível em www.studior.com.br

Agradecimentos

O Autor agradece:

Ao Eng. Rosalfonso Bortoni, MsC, por suas valiosas críticas e sugestões ao presente texto.

À Eletrônica Selenium S. A. pelos recursos colocados à disposição do Autor que a exime de quaisquer responsabilidades quanto às informações aqui veiculadas, da inteira responsabilidade do Autor.